

*Working Papers*



Technische Hochschule  
Ingolstadt

*Zukunft in  
Bewegung*



*Wolfgang Krämer*

## ***Optimale Approximation von Verzögerungsgliedern zweiter Ordnung durch Verzögerungsglieder erster Ordnung***

### ***Abstract***

Es werden Methoden für die optimale Approximation von Verzögerungsgliedern zweiter Ordnung durch Verzögerungsglieder erster Ordnung vorgestellt. Die Approximationen erfolgen einerseits im Zeit- und im Frequenzbereich, andererseits für Verzögerungsglieder mit aperiodischem und mit gedämpftem oszillierendem Verhalten. Die Approximationen im Zeitbereich können weitgehend analytisch durchgeführt werden; die Frequenzbereichsapproximationen müssen numerisch berechnet werden.

Die mit den vorgeschlagenen Methoden erzielten Ergebnisse werden vorgestellt und diskutiert.

### Key Words:

Modellreduktion, Verzögerungsglied zweiter Ordnung, Zeitbereich  
Aperiodisch gedämpftes Verzögerungsglied, Frequenzbereich  
Schwingungsfähiges Verzögerungsglied

# Optimale Approximation von Verzögerungsgliedern zweiter Ordnung durch Verzögerungsglieder erster Ordnung

Von Wolfgang Krämer

## 1 Einleitende Übersicht

In der Regelungstechnik werden für den Entwurf und die Analyse von Regelungen häufig reduzierte, d.h. vereinfachte, Modelle der Regelstrecke verwendet, s. z.B. [1], [2], [3].

Die reduzierten Modelle haben eine niedrigere Ordnung als vollständige, komplexe Modelle; sie beschreiben das dynamische Verhalten der Regelstrecke nur näherungsweise. Die Verwendung solcher vereinfachten Modelle ist insbesondere für den Entwurf einfacher Regler, z.B. vom PID-Typ, zweckmäßig [4], wobei darauf zu achten ist, dass die Regelung im Hinblick auf Modellgenauigkeiten robust ist. In der vorliegenden Arbeit wird die Bestimmung reduzierter dynamischer Modelle in einem speziellen Fall untersucht.

Die Zeitkonstante eines Verzögerungsglieds erster Ordnung, d.h. eines  $PT_1$ -Glieds, wird so bestimmt, dass das Verhalten eines Verzögerungsglieds zweiter Ordnung, eines  $PT_2$ -Glieds, optimal approximiert wird. Die Approximation erfolgt zunächst im Zeitbereich für aperiodisch gedämpfte  $PT_2$ -Glieder, indem die Sprungantwort des  $PT_1$ -Glieds optimal angepasst wird.

Dabei wird die sog. T-Summen-Regel bzw. T-Summen-Zeitkonstante bestätigt [1], [2]. Sodann wird das Approximationsverfahren auf gut gedämpfte schwingungsfähige Verzögerungsglieder ausgeweitet. Basierend auf den damit erzielten Ergebnissen wird ein Bereich für das Dämpfungsmaß vorgeschlagen, in dem die Approximation mit guter Genauigkeit möglich ist. Zum Abschluss der Untersuchungen im Zeitbereich wird kurz der aperiodische Grenzfall betrachtet.

Schließlich wird eine Modellreduktion im Frequenzbereich durch eine optimale Approximation des Amplitudengangs durchgeführt; auch dabei wird von aperiodisch gedämpften und von gut gedämpften schwingungsfähigen Verzögerungsgliedern zweiter Ordnung ausgegangen.

## 2 Approximation im Zeitbereich

### 2.1 Approximation aperiodisch gedämpfter PT<sub>2</sub>-Glieder

Das dynamische Verhalten aperiodisch gedämpfter PT<sub>2</sub>-Glieder kann durch die Übertragungsfunktion

$$G_2(s) = \frac{K}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \quad (1)$$

mit den Zeitkonstanten  $T_1 > 0$  und  $T_2 > 0$  sowie dem Verstärkungsfaktor  $K \neq 0$  beschrieben werden. Das Verhalten dieses PT<sub>2</sub>-Glieds soll durch ein PT<sub>1</sub>-Glied mit der Übertragungsfunktion

$$G_1(s) = \frac{K}{1 + T_1^* s} \quad (2)$$

approximiert werden. Es ist offensichtlich, dass das PT<sub>1</sub>-Glied den gleichen Verstärkungsfaktor  $K$  wie das PT<sub>2</sub>-Glied haben muss, um stationäre Genauigkeit sicherzustellen. Damit kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit  $K = 1$  gesetzt werden. Die Zeitkonstante  $T_1^*$  des PT<sub>1</sub>-Glieds ist zu bestimmen. Dies erfolgt wie oben erwähnt durch eine optimale Approximation der Sprungantwort des PT<sub>2</sub>-Glieds.

Die Einheitssprungantwort des PT<sub>2</sub>-Glieds ist bekanntlich für  $T_1 \neq T_2$  ( $K = 1$ ), s. z.B. [1]

$$h_2(t) = 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2}. \quad (3)$$

Sie soll durch die Einheitssprungantwort

$$h_1(t) = 1 - e^{-t/T_1^*} \quad (4)$$

des PT<sub>1</sub>-Glieds approximiert werden.

Als Optimierungskriterium wird das Integral der quadratischen Abweichung der Sprungantworten

$$I = \int_0^{\infty} (h_2(t) - h_1(t))^2 dt \quad (5)$$

verwendet. Nach kurzer Zwischenrechnung erhält man

$$I(T_1^*) = \frac{1}{2} \cdot \frac{T_1^2 + 3T_1 T_2 + T_2^2}{T_1 + T_2} + \frac{1}{2} T_1^* - 2 \frac{(T_1 + T_2) T_1^* + T_1 T_2}{(T_1 + T_1^*)(T_2 + T_1^*)} T_1^*. \quad (6)$$

Für die folgenden Überlegungen und Berechnungen ist es zweckmäßig,  $T_2$  auf  $T_1$  und  $T_1^*$  auf  $T_1 + T_2$  zu beziehen:

$$T_2 = k \cdot T_1, \quad (7)$$

$$T_1^* = c \cdot (T_1 + T_2) = c \cdot (1+k) \cdot T_1. \quad (8)$$

Die Konstante  $k > 0$  ist also das Verhältnis der Zeitkonstanten  $T_2$  und  $T_1$ ;  $c > 0$  kann als normierte Zeitkonstante  $T_1^*$  des PT<sub>1</sub>-Glieds und  $T_1 + T_2$  als Maß für die „Gesamtverzögerung“ des PT<sub>2</sub>-Glieds betrachtet werden. Damit geht das Kriterium  $I$ , das nun von  $c$  abhängt, über in

$$I(c) = \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1+3k+k^2}{1+k} + \frac{1}{2} \cdot c(1+k) - 2c(1+k) \frac{k+c(1+k)^2}{(1+c(1+k))(k+c(1+k))} \right] T_1. \quad (9)$$

Die Konstante  $c$  wird nun so bestimmt, dass das Kriterium ein Minimum annimmt. Hierfür wird wie üblich  $dI/dc = 0$  gesetzt. Dies führt auf

$$(1+k)^4 c^4 + 2(1+k)^4 c^3 - 3(1+k^2)(1+k)^2 - 6k(1+k)^2 c - 3k^2 = 0. \quad (10)$$

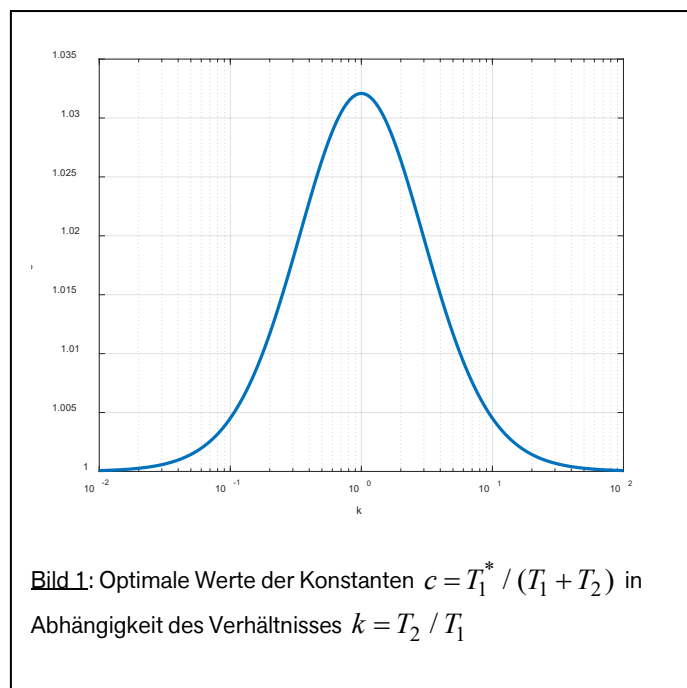
Nach der Descartesschen Zeichenregel [5] hat Gl. (10) eine positive Lösung. Also gibt es einen eindeutigen optimalen Wert für  $c$ . Dieser Wert lässt sich weiter eingrenzen: Bezeichnet man das Polynom der linken Seite von Gl. (10) mit  $P(c)$ , dann ist  $P(1) < 0$  und  $P(c) \rightarrow \infty$  für  $c \rightarrow \infty$ .

Also ist  $c > 1$  (entspr.  $T_1^* > T_1 + T_2$ ).

Offensichtlich hängt die Konstante  $c$  nur vom Verhältnis  $k = T_2 / T_1$  der Zeitkonstanten des PT<sub>2</sub>-Glieds ab. **Bild 1** zeigt diesen Zusammenhang.

Man erkennt:

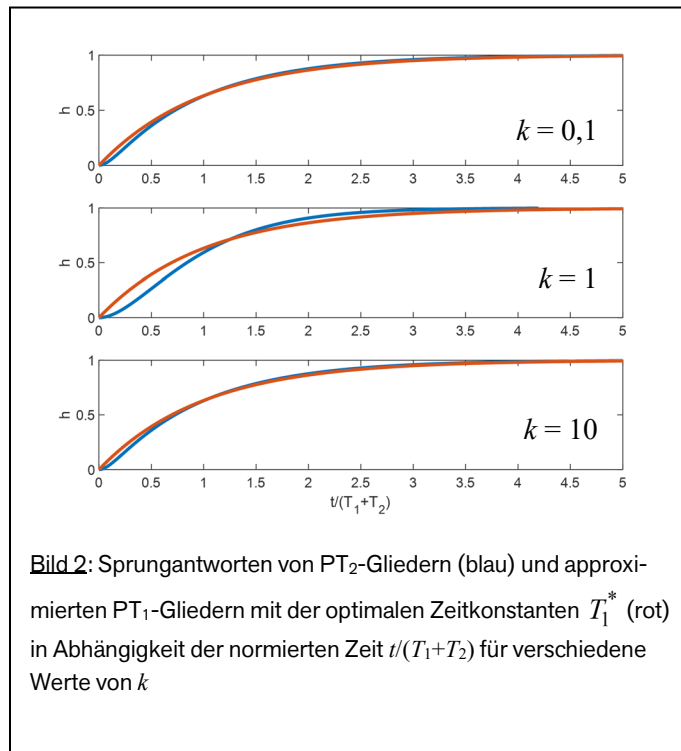
- Die Konstante  $c$  ist für alle Werte von  $k$  nur unwesentlich größer als eins. Damit ist  $T_1^* \approx T_1 + T_2$  eine gute Näherung für  $T_1^*$ ; dies bestätigt die T-Summenregel [1], [2] für den untersuchten Fall.



- Das Maximum für  $c$  ergibt sich für  $k = 1$ , d.h. für  $T_1 = T_2$ , zu  $c(k=1) = 1,0321$ .  $T_1^*$  ist also höchstens um ca. 3,2 % größer als  $T_1 + T_2$ .
- Der Verlauf von  $c(k)$  ist symmetrisch zu  $k = 1$ . Dies ist einleuchtend, da die Festlegung der Zeitkonstanten  $T_1$  bzw.  $T_2$  des PT<sub>2</sub>-Glieds willkürlich ist.

Es wird darauf hingewiesen, dass die Ergebnisse auch für  $k = 1$  bzw.  $T_1 = T_2$  gültig sind, da durch Reihenentwicklung gezeigt werden kann, dass die Sprungantwort nach Gl. (3) für  $T_1 \rightarrow T_2$  in die Sprungantwort für  $T_1 = T_2$ , d.h. die Sprungantwort für den asymptotischen Grenzfall, übergeht. Die Gln. (6), (8) und (10) können auch für diesen Fall problemlos ausgewertet werden. Auf die Einschränkung  $T_1 \neq T_2$  kann also verzichtet werden.

**Bild 2** zeigt Sprungantworten von  $PT_2$ -Gliedern und optimal approximierten  $PT_1$ -Gliedern für verschiedene Werte von  $k$ . Die Sprungantworten sind in Abhängigkeit der normierten Zeit  $t / (T_1 + T_2)$  dargestellt; diese Normierung ist gleich wie die der Zeitkonstanten  $T_1^*$ . Man erkennt, dass die Sprungantworten des approximierten Systems diejenigen des  $PT_2$ -Glieds gut annähern. Infolge der Zeitnormierung sind die Kurvenverläufe für  $k = 0,1$  und  $k = 10$  gleich; dies entspricht der Symmetrie in Bild 1.



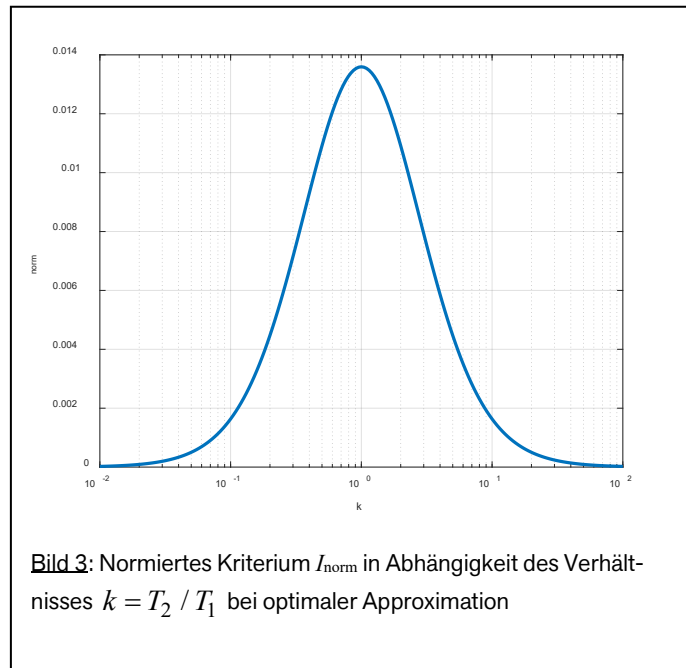
**Bild 2:** Sprungantworten von  $PT_2$ -Gliedern (blau) und approximierten  $PT_1$ -Gliedern mit der optimalen Zeitkonstanten  $T_1^*$  (rot) in Abhängigkeit der normierten Zeit  $t/(T_1+T_2)$  für verschiedene Werte von  $k$

Die Qualität der Approximation kann auch anhand des Optimierungskriteriums untersucht werden. Hierfür wird das normierte, dimensionslose Kriterium

$$I_{\text{norm}} = I / (T_1 + T_2) \tag{11}$$

betrachtet; das Kriterium wird also gleich wie die Zeit  $t$  normiert. **Bild 3** zeigt  $I_{\text{norm}}$  für die optimale Approximation in Abhängigkeit vom Verhältnis  $k$ . Der Verlauf des Kriteriums  $I_{\text{norm}}(k)$  ist symmetrisch zu  $k = 1$  wie der Verlauf von  $c(k)$  in Bild 1.

Die Approximation ist für  $k = 1$  am schlechtesten, worauf auch Bild 2 hindeutet. Je mehr sich  $k$  vom Wert eins unterscheidet, desto besser ist die Approximation. Dies ist einleuchtend, da sich für kleine und große Werte von  $k$  die Zeitkonstanten  $T_1$  und  $T_2$  stark unterscheiden und die kleine Zeitkonstante gegenüber der großen vernachlässigt werden kann.



## 2.2 Approximation gut gedämpfter schwingungsfähiger PT<sub>2</sub>-Glieder

Das im vorhergehenden Abschnitt beschriebene Vorgehen wird auf die Approximation schwingungsfähiger PT<sub>2</sub>-Glieder übertragen. Natürlich ist zu erwarten, dass die Approximation in diesem Fall weniger gut ist, da das PT<sub>1</sub>-Glieder das Überschwingen der Sprungantwort, das für schwingungsfähige PT<sub>2</sub>-Glieder typisch ist, nicht wiedergeben kann. Das wird aber nicht als ein wesentliches Problem betrachtet, da es ja auch bei der Approximation aperiodisch gedämpfter PT<sub>2</sub>-Glieder den prinzipiellen Unterschied gibt, dass die Sprungantwort des PT<sub>2</sub>-Glieds bei  $t = 0$  eine waagrechte Tangente hat, wogegen die Steigung der Sprungantwort des PT<sub>1</sub>-Glieds bei  $t = 0$  nicht null sondern  $K / T_1^*$  ist. Dieses unterschiedliche Verhalten wird allgemein akzeptiert. Somit sollte auch der Unterschied hinsichtlich des Überschwingens akzeptabel sein, sofern die Sprungantwort des PT<sub>2</sub>-Glieds nur wenig überschwingt. In diesem Zusammenhang wird auch diskutiert, bis zu welchem Überschwingen bzw. für welche Werte des Dämpfungsmaßes die Approximation zu guten Ergebnissen führt.

Das gedämpfte schwingungsfähige PT<sub>2</sub>-Glieder wird durch die Übertragungsfunktion

$$\tilde{G}_2(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0s + \omega_0^2} \quad (12)$$

mit dem Dämpfungsmaß  $0 < D < 1$  und der ungedämpften Kreisfrequenz  $\omega_0 > 0$  (engl.: natural frequency) beschrieben. Der Verstärkungsfaktor kann wieder als  $K = 1$  vorausgesetzt werden.

Für die Approximation wird, wie häufig bei der Untersuchung schwingungsfähiger Systeme, die normierte Zeit

$$\tau = \omega_0 t \quad (13)$$

verwendet. Die Sprungantwort des PT<sub>2</sub>-Glieds ist damit [1]

$$\tilde{h}_2(\tau) = 1 - e^{-D\tau} \left( \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \sin(\sqrt{1-D^2}\tau) + \cos(\sqrt{1-D^2}\tau) \right). \quad (14)$$

Mit der Normierung (13) wird die Zeitkonstante  $T_1^*$  des PT<sub>1</sub>-Glieds nach Gl. (2) zu

$$\tau_1^* = \omega_0 T_1^* \quad (15)$$

und seine Sprungantwort

$$h_1(\tau) = 1 - e^{-\tau/\tau_1^*}. \quad (16)$$

Nun muss also ein günstiger Wert von  $\tau_1^*$  bestimmt werden. Hierfür wird das Kriterium

$$\tilde{I}_{\text{norm}} = \int_0^{\infty} (\tilde{h}_2(\tau) - h_1(\tau))^2 d\tau \quad (17)$$

minimiert; wegen der Zeitnormierung (13) ist es bereits normiert. Man erhält

$$\tilde{I}_{\text{norm}} = \frac{\tau_1^*}{2} - \frac{4D\tau_1^{*2} + 2\tau_1^*}{\tau_1^{*2} + 2D\tau_1^* + 1} + \frac{4D^2 + 1}{4D}. \quad (18)$$

Um den optimalen Wert von  $\tau_1^*$  zu bestimmen, wird  $\tilde{I}_{\text{norm}}$  minimiert. Setzt man

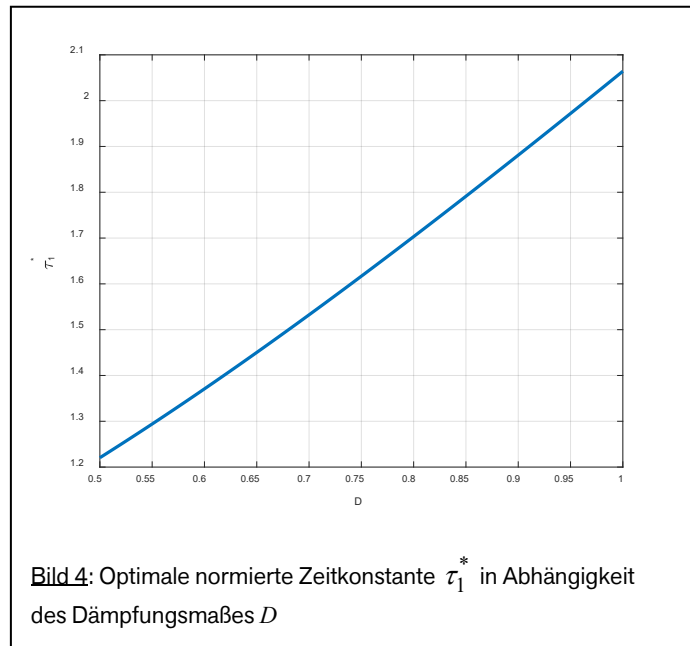
$d\tilde{I}_{\text{norm}} / d\tau_1^* = 0$ , erhält man

$$\tau_1^{*4} + 4D\tau_1^{*3} + 6(1-2D^2)\tau_1^{*2} - 12\tau_1^* - 3 = 0. \quad (19)$$

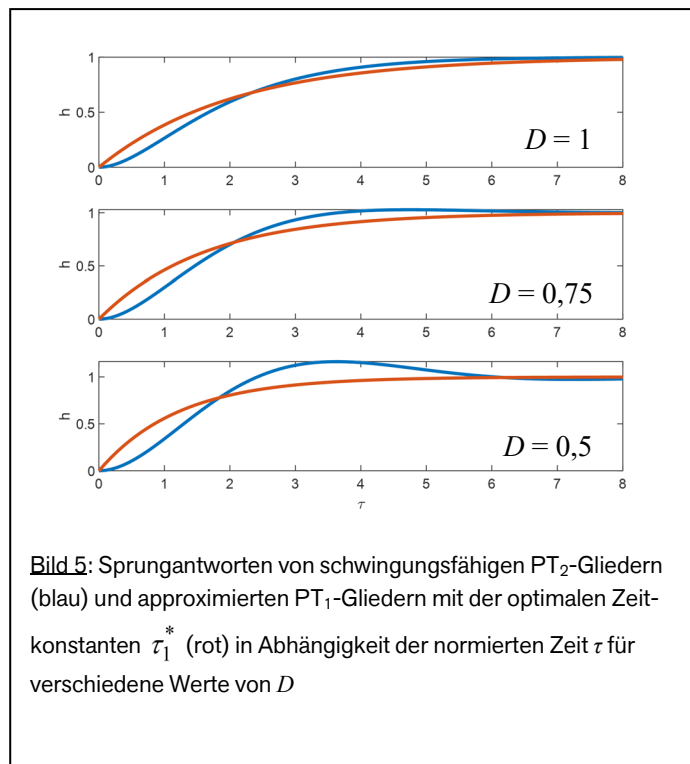
Nach der Descartesschen Zeichenregel hat auch Gl. (19) eine positive Lösung, so dass es einen eindeutigen optimalen Wert für  $\tau_1^*$  gibt. **Bild 4** zeigt diesen Wert in Abhängigkeit des Dämpfungsmaßes  $D$ .



Die Ergebnisse sind auch für das Dämpfungsmaß  $D = 1$  gültig, da die Sprungantwort  $\tilde{h}_2(\tau)$  nach Gl. (14) für  $D \rightarrow 1$  in die Sprungantwort für  $D = 1$ , d.h. die Sprungantwort für den aperiodischen Grenzfall, übergeht, wie sich durch Reihenentwicklung zeigen lässt.



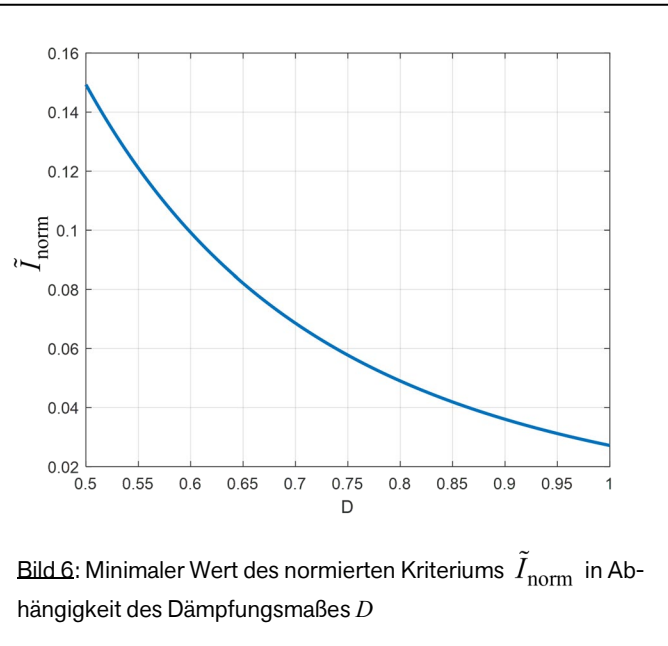
**Bild 5** zeigt Sprungantworten von schwingungsfähigen PT<sub>2</sub>-Gliedern und optimal approximierten PT<sub>1</sub>-Gliedern für verschiedene Werte von  $D$ . Man erkennt, dass die Approximation mit abnehmender Dämpfung schlechter wird, was auch zu erwarten ist. Dies zeigt auch **Bild 6**, in dem der minimale Wert des Optimierungskriteriums  $\tilde{I}_{\text{norm}}$  nach Gl. (17) in Abhängigkeit des Dämpfungsmaßes  $D$  dargestellt ist;  $\tilde{I}_{\text{norm}}$  nimmt mit abnehmender Dämpfung zu.



Anhand der in Bild 6 dargestellten Werte von  $\tilde{I}_{\text{norm}}$  kann diskutiert werden, für welche Werte des Dämpfungsmaßes  $D$  die Approximation gut ist. Für  $D = 1$ , d.h. für den aperiodischen Grenzfall, hat das Kriterium den kleinsten Wert  $\tilde{I}_{\text{norm}}(D = 1) = 0,0272$ . Auf Basis dieses Werts soll nun ein Bereich des Dämpfungsmaßes  $D_{\text{min}} \leq D \leq 1$  für eine gute Approximation definiert

werden. Akzeptiert man z.B. eine Verdoppelung des Werts  $\tilde{I}_{\text{norm}}(D=1)$ , ergibt sich die Untergrenze  $D_{\text{min}} = 0,768$  für eine gute Approximation. Die Güte der Approximation in dem entsprechenden Bereich für  $D$  kann anschaulich anhand des oberen und mittleren Diagramms in Bild 5 beurteilt werden.

Die Untergrenze  $D_{\text{min}} = 0,768$  unterscheidet sich nur wenig von dem



Wert  $D = \sqrt{1/2} \approx 0,707$ , der oft als günstiges Dämpfungsmaß für schnelles Einschwingen und geringes Überschwingen dynamischer Systeme, insbesondere geschlossener Regelkreise, angestrebt wird. Hierfür ist der Wert des Kriteriums  $\tilde{I}_{\text{norm}}(D = \sqrt{1/2}) = 2,461 \cdot \tilde{I}_{\text{norm}}(D = 1)$ . Diese Zunahme des Kriteriums könnte man auch als akzeptabel betrachten, so dass als Untergrenze des Bereichs für das Dämpfungsmaß, in dem das schwingungsfähige PT<sub>2</sub>-Glied gut approximiert werden kann, Werte von  $D_{\text{min}} = \sqrt{1/2} \dots 0,768$  in Betracht kommen.

Für  $D = \sqrt{1/2}$  schwingt die Sprungantwort des PT<sub>2</sub>-Glieds um ca. 4 % über. Damit ist der am Anfang dieses Abschnitts erläuterte prinzipielle Unterschied der Sprungantworten des PT<sub>1</sub>- und des PT<sub>2</sub>-Glieds hinsichtlich des Überschwingens für den empfohlenen Bereich  $D_{\text{min}} \leq D \leq 1$  in der Tat unproblematisch.

## 2.3 Aperiodischer Grenzfall

Wie bereits erwähnt gelten die oben dargestellten Ergebnisse jeweils auch für  $k = 1$  ( $T_1 = T_2$ ) bzw. für  $D = 1$ , d.h. für den aperiodischen Grenzfall. In Tabelle 1 sind diese Ergebnisse zusammengestellt. Das nicht normierte Kriterium für den schwingungsfähigen Fall ist  $\tilde{I} = \tilde{I}_{\text{norm}} / \omega_0$ , vgl. Gl. (13) und (17). Man sieht, dass die Ergebnisse konsistent sind, da bekanntlich  $T_1 = 1 / \omega_0$  ist.

	Auf Basis des aperiodisch gedämpften PT <sub>2</sub> -Glieds ( $k = 1$ )	Auf Basis des schwingungsfähigen PT <sub>2</sub> -Glieds ( $D = 1$ )
Optimale Zeitkonstante	$T_1^* = 2,0642 \cdot T_1$	$T_1^* = 2,0642 / \omega_0$
Kriterium	$I = 0,0272 \cdot T_1$	$\tilde{I} = 0,0272 / \omega_0$

## 3 Approximation im Frequenzbereich

Die Approximation im Frequenzbereich erfolgt, indem der Amplitudengang des PT<sub>1</sub>-Glieds optimal an den Amplitudengang des PT<sub>2</sub>-Glieds angenähert wird. Es ist offensichtlich, dass eine Approximation des Phasengangs nicht sinnvoll ist.

### 3.1 Approximation aperiodisch gedämpfter PT<sub>2</sub>-Glieder

Der Amplitudengang des PT<sub>2</sub>-Glieds nach Gl. (1) wird durch

$$A_2(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1 + T_1^2 \omega^2)(1 + T_2^2 \omega^2)}} \quad (20)$$

beschrieben [1]; der Amplitudengang des PT<sub>1</sub>-Glieds nach Gl. (2) ist

$$A_1(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + T_1^{*2} \omega^2}} \quad (21)$$

In diesen Beziehungen kann wieder  $K = 1$  gesetzt werden.

Um den optimalen Wert der Zeitkonstanten  $T_1^*$  zu bestimmen, wird das Kriterium

$$I_A = \int_0^{\infty} (A_2(\omega) - A_1(\omega))^2 d\omega \quad (22)$$

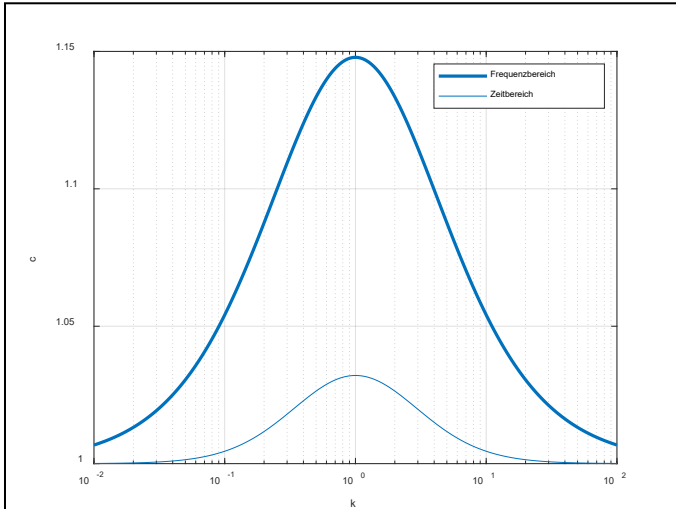
minimiert. Da keine analytische Lösung des Integrals (keine Stammfunktion) bekannt ist, werden die Integration und die Minimierung numerisch durchgeführt. **Bild 7** zeigt das Ergebnis in Form der normierten Zeitkonstanten  $c$  nach Gl. (8); das Bild enthält außerdem zum Vergleich das Ergebnis der Approximation im Zeitbereich.

Die Approximation des Amplitudengangs führt zu größeren Werten von  $c$  bzw. von  $T_1^*$  als die Approximation der Sprungantwort. Jedoch zeigt auch das Ergebnis der Approximation im Frequenzbereich, dass die Summe  $T_1 + T_2$  eine gute Näherung für  $T_1^*$  ist.

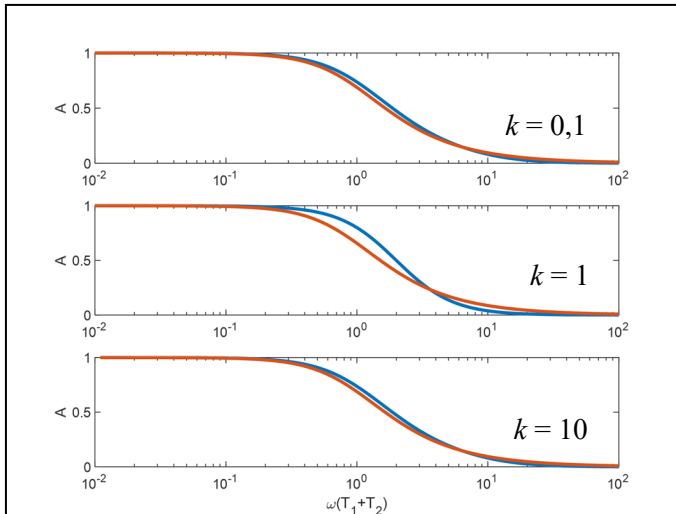
**Bild 8** zeigt Amplitudengänge von PT<sub>2</sub>-Gliedern und optimal approximierten PT<sub>1</sub>-Gliedern für verschiedene Werte von  $k$ . Die Amplitudengänge sind in Abhängigkeit der normierten Kreisfrequenz  $\omega \cdot (T_1 + T_2)$  dargestellt. Man erkennt einerseits, dass die Amplitudengänge des approximierten Systems diejenigen des PT<sub>2</sub>-Glieds gut annähern. Andererseits zeigt sich, dass wie bei der Approximation im Zeitbereich das Ergebnis für  $k=1$  am schlechtesten ist. Dies kann man auch anhand des normierten Kriteriums

$$I_{A,\text{norm}} = I_A \cdot (T_1 + T_2)$$

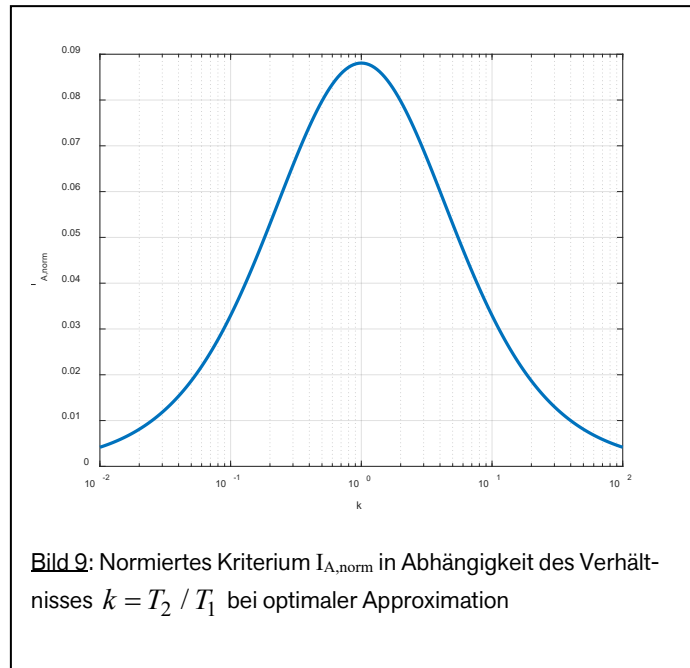
erkennen, s. **Bild 9**.



**Bild 7:** Konstante  $c = T_1^* / (T_1 + T_2)$  in Abhängigkeit des Verhältnisses  $k = T_2 / T_1$  für optimale Approximation im Frequenz- und Zeitbereich.



**Bild 8:** Amplitudengänge von PT<sub>2</sub>-Gliedern (blau) und approximierten PT<sub>1</sub>-Gliedern mit der optimalen Zeitkonstanten  $T_1^*$  (rot) in Abhängigkeit von  $\omega \cdot (T_1 + T_2)$  für verschiedene Werte von  $k$



### 3.2 Approximation gut gedämpfter schwingungsfähiger PT<sub>2</sub>-Glieder

Wie bereits im Zeitbereich sollen nun gut gedämpfte schwingungsfähige PT<sub>2</sub>-Glieder, deren Verhalten durch die Übertragungsfunktion  $\tilde{G}_2(s)$  nach Gl. (12) beschrieben wird, auch im Frequenzbereich approximiert werden. Der Amplitudengang dieser PT<sub>2</sub>-Glieder ist ( $K = 1$ ), [1]

$$\tilde{A}_2(\eta) = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \quad (23)$$

mit dem Frequenzverhältnis

$$\eta = \omega / \omega_0. \quad (24)$$

Der Amplitudengang (21) des PT<sub>1</sub>-Glieds lautet in Abhängigkeit des Frequenzverhältnisses

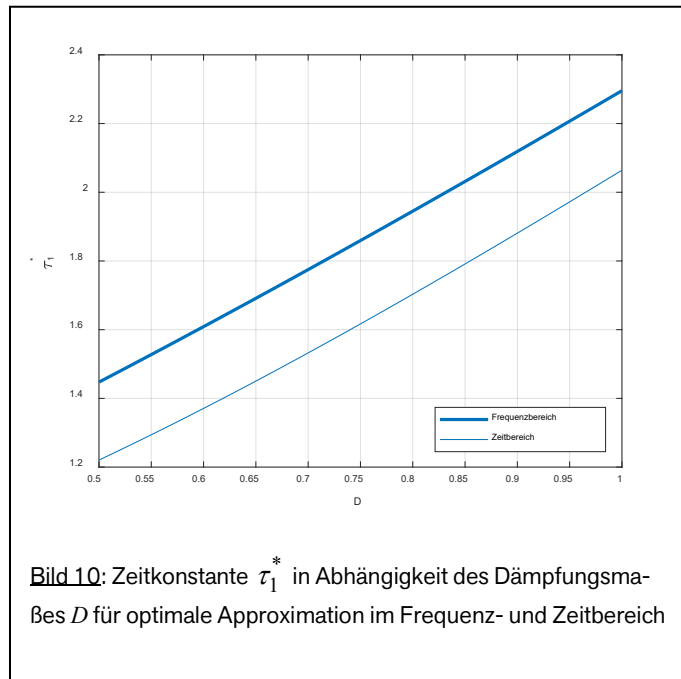
$$A_1(\eta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau_1^{*2} \eta^2}}$$

mit der normierten Zeitkonstanten  $\tau_1^*$  nach Gl. (15).

Der optimale Wert von  $\tau_1^*$  und damit von  $T_1^*$  wird durch Minimierung des Kriteriums

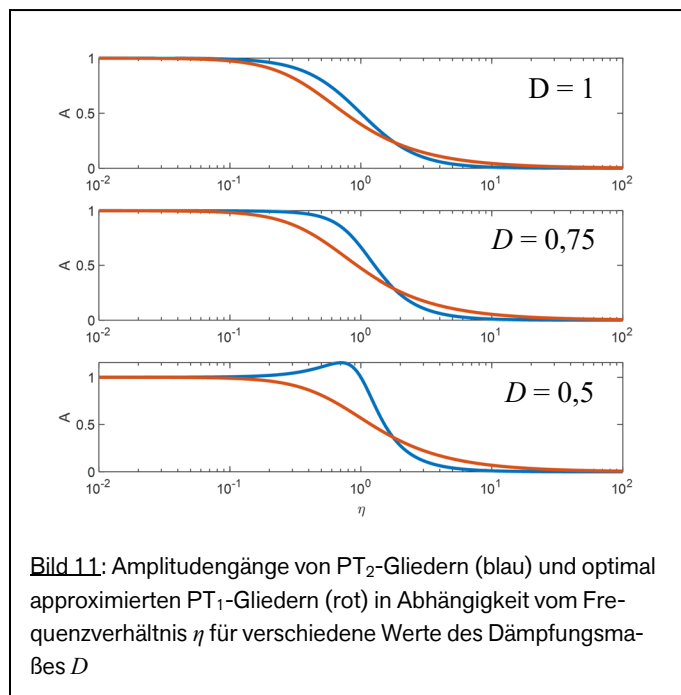
$$\tilde{I}_{A,norm} = \int_0^{\infty} (\tilde{A}_2(\eta) - A_1(\eta))^2 d\eta \quad (25)$$

bestimmt, das infolge der Verwendung des Frequenzverhältnisses  $\eta$  bereits normiert ist. Die Integration und Minimierung erfolgen auch hier auf numerische Weise, da keine Stammfunktion des Integranden bekannt ist. **Bild 10** zeigt das Ergebnis zusammen mit dem Resultat der Approximation im Zeitbereich. Man erkennt, dass auch hier die Approximation des Amplitudengangs zu größeren Werten von  $\tau_1^*$  führt als die Approximation der Sprungantwort.



**Bild 10:** Zeitkonstante  $\tau_1^*$  in Abhängigkeit des Dämpfungsmaßes  $D$  für optimale Approximation im Frequenz- und Zeitbereich

In **Bild 11** sind Amplitudengänge von  $PT_2$ -Gliedern und optimal approximierten  $PT_1$ -Gliedern für verschiedene Dämpfungsmaße zusammengestellt. Die Approximation wird mit abnehmenden Werten von  $D$  schlechter, wie sich auch anhand des hier nicht dargestellten Kriteriums  $\tilde{I}_{A,norm}$  erkennen lässt.



**Bild 11:** Amplitudengänge von  $PT_2$ -Gliedern (blau) und optimal approximierten  $PT_1$ -Gliedern (rot) in Abhängigkeit vom Frequenzverhältnis  $\eta$  für verschiedene Werte des Dämpfungsmaßes  $D$

Nun kann auch hier diskutiert werden, in welchem Bereich  $D_{min} \leq D \leq 1$  des Dämpfungsmaßes die Approximation gut ist. Der

kleinste Wert des Kriteriums  $\tilde{I}_{A,norm}$  nach Gl. (25) ergibt sich wieder für  $D = 1$ . Akzeptiert man eine Verdoppelung dieses Werts  $\tilde{I}_{A,norm}(D=1)$ , ergibt sich eine Bereichsuntergrenze  $D_{min} = 0,766$ . Für den oft günstigen Wert  $D = \sqrt{1/2}$  ist der Wert des  $\tilde{I}_{A,norm}(D = \sqrt{1/2}) = 2,443 \cdot \tilde{I}_{A,norm}(D=1)$ , der ebenfalls akzeptabel sein dürfte. Als Bereichsuntergrenze kommen also Werte  $D_{min} = \sqrt{1/2} \dots 0,766$  in Betracht. Dieses Ergebnis stimmt

gut mit den Werten überein, die für die Approximation der Sprungantwort vorgeschlagen werden, s. Abschnitt 2.2. Auch die Zunahmen der Kriterien für  $D = \sqrt{1/2}$  sind ähnlich groß.

### 3.3 Aperiodischer Grenzfall

Sowohl die Überlegungen des Abschnitts 3.1 für  $k = 1$  als auch die Überlegungen des Abschnitts 3.2 für  $D = 1$  gelten für den asymptotischen Grenzfall. Die in diesen Abschnitten erzielten Ergebnisse sind im Sinn von Abschnitt 2.3 konsistent.

## 4 Zusammenfassung

Es werden Werte der Zeitkonstanten  $T_1^*$  eines PT<sub>1</sub>-Glieds für die optimale Approximation des Verhaltens von PT<sub>2</sub>-Gliedern bestimmt. Dies erfolgt im Zeitbereich durch Anpassung der Sprungantwort und im Frequenzbereich durch Anpassung des Amplitudengangs des PT<sub>1</sub>-Glieds. Die Approximationen erfolgen für PT<sub>2</sub>-Glieder mit aperiodischem und mit gut gedämpftem oszillierendem Verhalten. Für den zweiten Fall werden Bereiche  $D_{\min} \leq D \leq 1$  für das Dämpfungsmaß  $D$  angegeben, in denen die Approximation mit guter Genauigkeit möglich ist. Die wesentlichen Ergebnisse sind in [Tabelle 2](#) zusammengestellt.

Für den aperiodischen Grenzfall sind sowohl die Ergebnisse der Approximation aperiodisch gedämpfter als auch die Ergebnisse der Approximation schwingungsfähiger PT<sub>2</sub>-Glieder gültig. Beide Approximationsverfahren führen in diesem Fall zu konsistenten Ergebnissen.

Tabelle 2: Übersicht der Ergebnisse

	Für das aperiodisch gedämpfte PT <sub>2</sub> -Glied	Für das schwingungsfähige PT <sub>2</sub> -Glied
Normierungen	Verh. der Zeitkonst.: $k = T_2/T_1$ Zeitnorm.: $c = T_1^* / (T_1 + T_2)$	Zeitnorm.: $\tau = \omega_0 \cdot t$ $\tau_1^* = \omega_0 T_1^*$
Zeitbereich	Analytische Berechnung des Optimierungskriteriums und seiner Ableitung.	
	c ist eindeutige positive Lösung einer algebraischen Gl. 4. Grads.  Bestätigung der T-Summenregel $T_1^* \approx T_1 + T_2$ .  Die Approximation ist für $k = 1$ am schlechtesten.	$\tau_1^*$ ist eindeutige positive Lösung einer algebraischen Gl. 4. Grads.  Gute Approximation für Dämpfungsmaß $D_{\min} \leq D \leq 1$ mit $D_{\min} = \sqrt{1/2} \dots 0,768$ .
Frequenzbereich	Numerische Berechnung und Minimierung des Optimierungskriteriums.  Optimale Werte für $T_1^*$ sind größer als bei der Approximation im Zeitbereich.	
	Bestätigung der T-Summenregel $T_1^* \approx T_1 + T_2$ .  Die Approximation ist für $k = 1$ am schlechtesten.	Gute Approximation für Dämpfungsmaß $D_{\min} \leq D \leq 1$ mit $D_{\min} = \sqrt{1/2} \dots 0,766$ .



## Literatur

- [1] Lunze, J.: Regelungstechnik 1. Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen. 12. Auflage. Springer Vieweg, Heidelberg, 2020.
- [2] Lutz, H.; W. Wendt.: Taschenbuch der Regelungstechnik. 12., ergänzte Auflage. Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten, 2021.
- [3] Åström, K; T. Hägglund: Advanced PID Control. ISA, Research Triangle Park, NC, 2006.
- [4] Kuhn, U.: Eine praxisnahe Einstellregel für PID-Regler: Die T-Summenregel. Automatisierungstechnische Praxis atp 37 (1995) 5, S. 10 – 16.
- [5] Bronstein, I. N.; K. A. Semendjajew; G. Musiol: Taschenbuch der Mathematik. 11., aktualisierte Auflage. Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten, 2020.



*Wolfgang Krämer*

***Optimale Approximation von  
Verzögerungsgliedern zweiter  
Ordnung durch Verzögerungsglieder  
erster Ordnung***

***Impressum***

**Herausgeber**

Der Präsident der Technischen Hochschule Ingolstadt  
Esplanade 10, 85049 Ingolstadt  
Telefon: +49 841 9348-0  
Fax: +49 841 9348-2000  
E-Mail: [info@thi.de](mailto:info@thi.de)

**Druck**

Hausdruck

Die Beiträge aus der Reihe „Arbeitsberichte – Working Papers“  
erscheinen in unregelmäßigen Abständen. Alle Rechte,  
insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung  
sowie der Übersetzung vorbehalten. Nachdruck, auch  
auszugsweise, ist gegen Quellenangabe gestattet,  
Belegexemplar erbeten.

**Internet**

Alle Themen aus der Reihe „Arbeitsberichte – Working Papers“,  
können Sie unter der Adresse [www.thi.de](http://www.thi.de) nachlesen.